

UOT 517.957

MÜƏYYƏN İNTEQRALIN MEXANİKA MƏSƏLƏLƏRİNƏ TƏTBİQİ

Ağarzeyev B.K., Hüseynova M.M.

“Azərbaycan Dövlət Dəniz Akademiyası” PHŞ

Az1000, Bakı şəh., Z.Əliyeva küç.,18

E-mail:leyla.hasanova@asco.az

Xülasə. Məqalədə müəyyən integralın bəzi mexanika məsələlərinə tətbiqindən bəhs edilir. Integralın köməyi ilə müxtəlif hallarda görülən işin hesablanması araşdırılır və təyin olunur. Əvvəlcə suya batırılmış konus araşdırılır, suyun itələmə qüvvəsi təyin olunur və görülən iş tapılır. Sonra isə su ilə dolu olan hovuzun dibindəki kürəni hovuzdan çıxartmaq üçün görülən iş tapılır. Baxılan məsələlər sonda integralların köməyi ilə hesablanır.

Аннотация. В статье рассматривается применение определенного интеграла к некоторым задачам механики. Исследовано и определено вычисление работы, совершаемой в различных случаях с помощью интеграла. Сначала исследуется конус, погруженный в воду, определяется выталкивающая сила воды и находится совершаемая работа. Затем находится работа, совершаемая при выталкивании шара со дна бассейна, наполненного водой. Наконец, рассматриваемые задачи вычисляются с помощью интегралов.

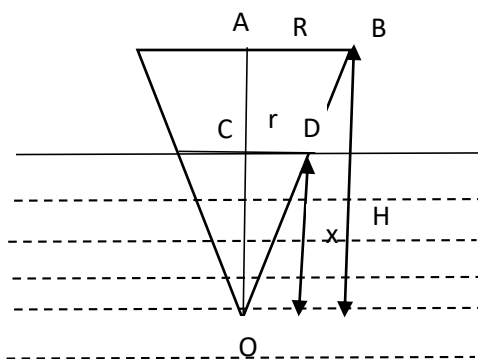
Abstract. This article examines the application of the definite integral to certain problems in mechanics. The calculation of the work performed in various cases using the integral is explored and defined. First, a cone immersed in water is examined, the buoyant force of the water is determined, and the work performed is found. Next, the work done when pushing a ball off the bottom of a pool filled with water is found. Finally, the problems under consideration are calculated using integrals.

Açar sözlər: funksiya, integral, iş, çəki, ibtidai funksiya

Ключевые слова: функция, интеграл, работа, вес, первообразная функция
Key words: function, integral, work, weight, antiderivative function

Giriş. Kəsilməz $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyalarının ümumi şəklinə $f(x)$ funksiyasının inteqralı deyilir. İnteqral, riyaziyyatın əsas anlayışlarından biridir və bir çox hesablamalarda istifadə olunur. İnteqralın ən geniş tətbiq sahələrindən biri də Mexanika elmidir. Məsələn, funksiyanın müəyyən bir aralıqdakı inteqralı onun sahəsini müəyyən edir. Bundan başqa cismnin həcmnin hesablanması da inteqral tətbiq olunur. Bu tip məsələlərdən bir neçəsini araşdıraq.

Əsas hissə. Hündürlüyü H və oturacağının radiusu R olan bircins konus oxu şaquli vəziyyətdə olmaqla, təpəsi aşağı suya batır. Suyun itələmə qüvvəsinə qarşı görülən işin tapılması məsələsini araşdıraq.



Şəkil 1

Konus suya batarkən onun batan hissəsinin hündürlüyünü x ilə işarə edək ($0 \leq x \leq H$) (şəkil 1).

Batan hissənin oturacağının radiusunu r ilə işarə edək. OCD və OAB üçbucaqlarının oxşarlığına əsasən alırıq:

$$\frac{r}{R} = \frac{x}{H} \quad \text{və ya} \quad r = \frac{R}{H} x$$

Bu halda batan hissənin həcmi aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 x = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot x^3$$

və suyun itələmə qüvvəsi

$$F(x) = \frac{1}{3} \pi \rho g \frac{R^2}{H^2} \cdot x^3$$

şəklində olacaq. Onda məlum düstura əsasən görülən işi tapsaq, alırıq:

$$A = \frac{1}{3} \pi \rho g \frac{R^2}{H^2} \cdot \int_0^H x^3 dx = \frac{1}{3} \pi \rho g \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^H = \frac{1}{12} \pi \rho g R^2 H^2$$

Beləliklə, inteqralın köməyiylə görülən işi asanlıqla tapmış olduq.

Daha belə bir məsələni nəzərdən keçirək. Radiusu R və xüsusi çəkisi δ olan kürə su ilə dolu olan H dərinliyində hovuzun dibindədir. Kürəni hovuzdan çıxartmaq üçün görülən işi tapaq. Bunun üçün biz yenə inteqraldan istifadə edəcəyik.

Aydındır ki, kürəni hovuzun dibindən suyun səthinə çatana qədər qaldırmaq üçün lazım olan F_1 qüvvəsi sabit olub, bu kürənin $P_k = \frac{4}{3}\pi R^3 \delta$ çəkisi ilə kürənin həcminə bərabər miqdarda suyun $P_{su} = \frac{4}{3}\pi R^3 \delta_1$ çəkisi fərqi bərabərdir (δ_1 – suyun xüsusi çəkisidir, $\delta_1 = 1$). Yəni

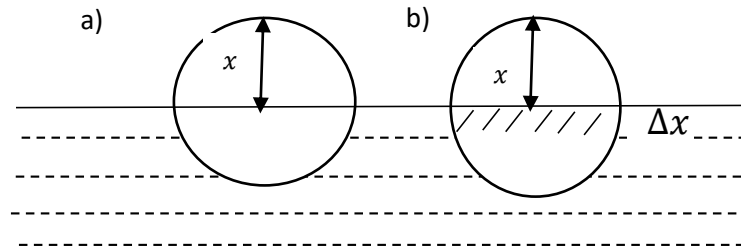
$$F_1 = P_k - P_{su} = \frac{4}{3}\pi R^3 (\delta - 1)$$

Odur ki, kürəni suyun səthinə çatana qədər qaldırarkən görülən A_1 işi F_1 qüvvəsi ilə $H - 2R$ qalxma hündürlüyünün hasilinə bərabər olur:

$$A_1 P = F_1 (H - 2R) = \frac{4}{3}\pi R^3 (\delta - 1) (H - 2R)$$

İndi isə kürə suyun səthinə çatandan sonra onu çıxarmaq üçün görülən işi hesablayaq.

Kürənin sudan kənara çıxan hissəsinin (şəkil 2,a) hündürlüyünü x ilə işarə edək. Onda kürəni sudan yuxarı qaldıran F_2 qüvvəsi x -dən asılı olaraq dəyişəcək: $F_2 = F_2(x)$.



Şəkil 2

Bu qüvvə kürənin P_k çəkisi ilə kürənin suda qalan hissəsinin həcmi miqdarında olan suyun P_{su}^* çəkisi fərqi bərabər olur:

$$F_2 = P_k - P_{su}^*$$

Burada kürənin suda qalan hissəsinin həcmi, hündürlüyü $h = 2R - x$ olan kürə seqmentinin həcmi aşağıdakı şəkildə olduğu üçün

$$\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \frac{\pi}{3} (2R - x)^2 (R + x) = \frac{\pi}{3} (x^3 - 3Rx^2 + 4R^3)$$

$F(x)$ üçün alırıq:

$$F(x) = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{\pi}{3} (x^3 - 3Rx^2 + 4R^3) = \frac{\pi}{3} [4R^3 (\delta - 1) - x^3 + 3Rx^2]$$

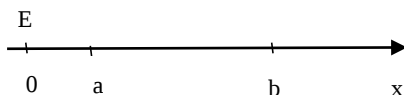
Əgər kürənin Δx qədər hündürlükdə (şəkil 2 b) olan hissəsini sudan çıxartmaq üçün görülən işi tapsaq, bu təqribi olaraq $F(x) \cdot \Delta x$ olacaq. Onda kürə suyun səthinə çatdıqdan sonra onun sudan çıxarılması üçün görülən işi A_2 ilə işarə etsək, məlum düstura əsasən alırıq:

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^{2R} F(x) dx = \frac{\pi}{3} \int_0^{2R} [4R^3 (\delta - 1) - x^3 + 3Rx^2] dx = \\ &= \frac{\pi}{3} 4R^3 (\delta - 1)x - \frac{x^4}{4} + Rx^3 \Big|_0^{2R} = \frac{4}{3}\pi R^4 (2\delta - 1) \end{aligned}$$

Beləliklə kürəni tamamilə hovuzdan çıxarmaq üçün görülən işi A ilə işarə etsək, alırıq:

$$A=A_1 + A_2 = \frac{4}{3}\pi R^3(R + (\delta - 1)H)$$

İnteqralın mexanikaya tətbiqinə misal olaraq daha bir məsələyə baxaq. Koordinat başlanğıcında yerləşən E elektrik yükünün təsiri ilə e elektronu $(a,0)$ nöqtəsindən $(b,0)$ nöqtəsinə qədər yerini dəyişmişdir (şəkil 3). Təsir qüvvəsinin gördüyü işi tapaq.



Şəkil 3

Kulon qanununa görə yüklərin təsir qüvvəsinin $F = K \cdot \frac{eE}{r^2}$ düsturu ilə təyin olunduğu məlumdur. Burada r -yüklər arasındakı məsafə, K -mütənasiblik əmsəlidir.

Aydın ki, e -nin E -dən olan məsafəsini x ilə işarə etsək, $a \leq x \leq b$ olar, onda təsir qüvvəsi

$$F = F(x) = K \cdot \frac{eE}{x^2}$$

olacaq.

Elektronun kifayət qədər kiçik Δx ($a \leq x + \Delta x \leq b$) məsafəsindəki hərəkəti zamanı təsir qüvvəsinin gördüyü işi tapsaq, bu iş təqribi olaraq

$$F(x)\Delta x = K \cdot \frac{eE}{x^2} \Delta x$$

olur. Beləliklə, tələb olunan işi tapsaq, (1) düsturuna əsasən alarıq:

$$A = \int_a^b F(x)dx = KeE \int_a^b \frac{dx}{x} = -KeE \cdot \frac{1}{x} \Big|_a^b = KeE \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Nəticə. Beləliklə, inteqralın bir çox sahəyə tətbiqilə yanaşı, mexanika məsələlərinin həllində də böyük yeri olduğunu müəyyən edir. Belə ki, baxılan işdə müəyyən inteqralın köməyiylə bir neçə mexanika məsələsi həll olunmuşdur.

Ədəbiyyat

1. M.X. Nəsimov “Məktəb kursunda riyazi analizin elementləri”, Metodik vəsait, Bakı 1991
2. S.K. Abdullayev, F.A Abdullayev, V.A.Mehrabov “Riyazi analiz”, Bakı, 2011
3. H.P. Vəliyev “Riyazi analiz-1”, Bakı, 2021
4. M.V. Vəliyev “Riyazi analiz”, Bakı, 2023
5. B.K. Ağarəyev “Riyazi analiz”, Bakı, 2024

Məqalə qəbul olunub: 14.10.25
Təvsiyə edib: prof. Həsənov Y.N.