

UOT 517.984

KƏSİLMƏ NÖQTƏLƏRİNDƏ QOŞMA ŞƏRTLƏRİLƏ VERİLƏN GECİKƏN ARQUMENTLİ MƏSƏLƏNİN ASİMPOTOTİKASI

Bayramov A.M.

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti
Bakı şəh., Azadlıq pr., 20
E-mail: azadbay2020@gmail.com

Xülasə. Bu işdə kəsilmə nöqtələrində qoşma şərtləri ilə verilən gecikən argumentli Şturm-Liuvill tip məsələnin məxsusi ədədlərinin asimptotikası öyrənilir və requlyarizə edilmiş izi hesablanır.

Аннотация. В данной работе изучается асимптотика собственных значений задачи типа Штурма-Лиувилля с запаздывающим аргументом и условиями сопряжения в точках разрыва и вычисляется регуляризованный след.

Abstract. In this paper, we study the asymptotic behavior of the eigenvalues of a Sturm-Liouville problem with a retarded argument and transmission conditions at discontinuity points and calculate the regularized trace.

Açar sözlər: gecikən argumentli diferensial tənlik, məxsusi ədəd və məxsusi funksiyaların asimptotikası, requlyarizə edilmiş iz

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, асимптотика собственных значений и собственных функций, регуляризованный след

Key words: differential equation with retarded argument, asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions, regularized trace

İlk dəfə skalyar tənlik üçün requlyarizə edilmiş iz İ.M. Gelfand və B.M. Levitanın [1] işində hesablanmışdır. Bu təməl işdən sonra müxtəlif müəlliflərin requlyarizə edilmiş izlərə aid [2 – 6] tədqiqatları ortaya çıxmışdır. Bu işdə gecikən argumentli Şturm-Liuvill tip məsələnin requlyarizə edilmiş izi hesablanır.

$[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ aralığında

$$y''(x) + q(x)y(x - \Delta(x)) + \lambda^2 y(x) = 0 \quad (1)$$

tənliyi

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

$$y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0, \quad (3)$$

sərhəd şərtləri və

$$y(h_1 - 0) - \delta y(h_1 + 0) = 0, \quad (4)$$

$$y'(h_1 - 0) - \delta y'(h_1 + 0) = 0, \quad (5)$$

$$y(h_2 - 0) - \gamma y(h_2 + 0) = 0, \quad (6)$$

$$y'(h_2 - 0) - \gamma y'(h_2 + 0) = 0, \quad (7)$$

qoşma şərtləri ilə verilən sərhəd məsələsinin requlyarizə edilmişizi hesablanır, burada $q(x)$ $[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ aralıqlarının hər birində həqiqi qiymətli və kəsilməz funksiyadır, $q(h_i \pm 0) = \lim_{x \rightarrow h_i \pm 0} q(x)$, $i = 1, 2$ sonlu limiti var; $\Delta(x) \geq 0$ aralıqlarının hər birində həqiqi qiymətli və kəsilməz funksiyadır, $\Delta(h_i \pm 0) = \lim_{x \rightarrow h_i \pm 0} \Delta(x)$, $i = 1, 2$ sonlu limiti var;

$x - \Delta(x) \geq h_1$, $x \in [0, h_1)$ isə $x - \Delta(x) \geq h_2$, $x \in (h_1, h_2)$, isə $x - \Delta(x) \geq h_2$ $x \in (h_2, \pi]$ isə λ – həqiqi spektral parametrlər, h_1, h_2 δ, γ həqiqi sabitlərdir, belə ki $0 < h_1 < h_2 < \pi$, $\sin \alpha \cos \alpha \neq 0$.

Bu işdə (1)-(7) məsələsinin requlyarizə edilmiş izi hesablanır.

Tutaq ki, $\omega_1(x, \lambda)$ (1) tənliyinin $[0, h_1)$ aralığında

$$\omega_1(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad \omega_1'(0, \lambda) = -\cos \alpha$$

şərtlərini ödəyən həllidir. Bu başlanğıc şərtlər yeganə həll təyin edir (bax 1).

Yuxarıdakı həlli təyin etdikdən sonra (1) tənliyinin $[h_1, h_2]$ aralığında $\omega_2(x, \lambda)$ həllini $\omega_1(x, \lambda)$ vasitəsi və

$$\omega_2(h_1, \lambda) = \delta^{-1} \omega_1(h_1, \lambda), \quad \omega_2'(h_1, \lambda) = \delta^{-1} \omega_1'(h_1, \lambda)$$

başlanğıc şərtləri ilə təyin edək.

Yuxarıdakı həlləri təyin etdikdən sonra (1) tənliyinin $[h_2, \pi]$ aralığında $\omega_3(x, \lambda)$ həllini $\omega_2(x, \lambda)$ vasitəsi və

$$\omega_3(h_2, \lambda) = \gamma^{-1} \omega_2(h_2, \lambda), \quad \omega_3'(h_2, \lambda) = \gamma^{-1} \omega_2'(h_2, \lambda)$$

başlanğıc şərtləri ilə təyin edək.

Nəhayət, $[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ aralığında

$$\omega(x, \lambda) = \begin{cases} \omega_1(x, \lambda), & x \in [0, h_1) \\ \omega_2(x, \lambda), & x \in (h_1, h_2) \\ \omega_3(x, \lambda), & x \in (h_2, \pi] \end{cases}$$

bərabərliyi ilə təyin olunmuş $\omega(x, \lambda)$ funksiyası $[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ aralığında (1) tənliyini, sol uca sərhəd şərtini və keçid şərtlərini ödəyir.

Aşağıdakı düsturlar əldə edilir

$$\begin{aligned} \omega_1(x, \lambda) = & \sin \alpha \cos \lambda x - \frac{\cos \alpha}{\lambda} \sin \lambda x - \\ & - \frac{\sin \alpha}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) \sin \lambda(x - \Delta(\tau)) d\tau - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sin \alpha}{2\lambda} \int_0^x q(\tau) \sin \lambda(x - 2\tau + \Delta(\tau)) d\tau - \\
 & -\frac{\cos \alpha}{2\lambda^2} \int_0^x q(\tau) \cos \lambda(x - \Delta(\tau)) d\tau + \\
 & +\frac{\cos \alpha}{2\lambda^2} \int_0^x q(\tau) \cos \lambda(x - 2\tau - \Delta(\tau)) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_2(x, \lambda) &= \frac{\sin \alpha}{\delta} \cos \lambda x - \frac{\cos \alpha}{\lambda \delta} \sin \lambda x - \\
 & -\frac{\sin \alpha}{2\lambda \delta} \int_0^x q(\tau) \sin \lambda(x - \Delta(\tau)) d\tau - \\
 & -\frac{\sin \alpha}{2\lambda \delta} \int_0^x q(\tau) \sin \lambda(x - 2\tau + \Delta(\tau)) d\tau - \\
 & -\frac{\cos \alpha}{2\lambda^2 \delta} \int_0^x q(\tau) \cos \lambda(x - \Delta(\tau)) d\tau + \\
 & +\frac{\cos \alpha}{2\lambda^2 \delta} \int_0^x q(\tau) \cos \lambda(x - 2\tau - \Delta(\tau)) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right),
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_3(x, \lambda) &= \frac{\sin \alpha}{\delta \gamma} \cos \lambda x - \frac{\cos \alpha}{\lambda \delta \gamma} \sin \lambda x - \\
 & -\frac{\sin \alpha}{\lambda \delta \gamma} \int_0^x q(\tau) \sin \lambda(x - \Delta(\tau)) d\tau - \\
 & -\frac{\sin \alpha}{2\lambda \delta \gamma} \int_0^x q(\tau) \sin \lambda(x - 2\tau + \Delta(\tau)) d\tau - \\
 & -\frac{\cos \alpha}{2\lambda^2 \delta \gamma} \int_0^x q(\tau) \cos \lambda(x - \Delta(\tau)) d\tau +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\cos \alpha}{2\lambda^2 \delta \gamma} \int_0^x q(\tau) \cos \lambda(x - 2\tau - \Delta(\tau)) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right). \quad (10)$$

$\omega(x, \lambda)$ -i (3)-də yerinə yazsaq,

$$W(\lambda) \equiv \omega(\pi, \lambda) \cos \beta + \omega'(\pi, \lambda) \sin \beta = 0. \quad (11)$$

xarakteristik tənliyini alırıq.

(8) –(11)-dən alırıq

$$\begin{aligned} W(\lambda) \equiv & -\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\delta \gamma} \lambda \sin \lambda \pi + \\ & + \frac{\sin(\alpha - \beta) \sin \beta}{\delta \gamma} \cos \lambda \pi - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\lambda \delta} \sin \lambda \pi - \\ & - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{2\lambda \delta \gamma} \int_0^\pi q(\tau) [\cos \lambda(\pi - \Delta(\tau)) + \cos \lambda(\pi - 2\tau + \Delta(\tau))] d\tau - \\ & - \frac{\sin \alpha \cos \beta}{2\lambda \delta \gamma} \int_0^\pi q(\tau) [\sin \lambda(\pi - \Delta(\tau)) + \sin \lambda(\pi - 2\tau + \Delta(\tau))] d\tau + \\ & - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{2\lambda \delta \gamma} \int_0^\pi q(\tau) [\sin \lambda(\pi - \Delta(\tau)) + \sin \lambda(\pi - 2\tau + \Delta(\tau))] d\tau + \\ & + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{4\lambda \delta \gamma} \int_0^\pi q(\tau) \left[\int_0^{\tau - \Delta(\tau)} q(t_1) \sin \lambda(\pi - \Delta(\tau) - \Delta(t_1)) dt_1 \right] d\tau - \\ & - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{4\lambda \delta \gamma} \int_0^\pi q(\tau) \left[\int_0^{\tau - \Delta(\tau)} q(t_1) \sin \lambda(\pi - 2\tau + \Delta(\tau) + \Delta(t_1)) dt_1 \right] d\tau + \\ & + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{4\lambda \delta \gamma} \int_0^\pi q(\tau) \left[\int_0^{\tau - \Delta(\tau)} q(t_1) \sin \lambda(\pi - \Delta(\tau) - 2t_1 + \Delta(t_1)) dt_1 \right] d\tau - \\ & - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{4\lambda \delta \gamma} \int_0^\pi q(\tau) \left[\int_0^{\tau - \Delta(\tau)} q(t_1) \sin \lambda(\pi - 2\tau + \Delta(\tau) + 2t_1 - \Delta(t_1)) dt_1 \right] d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right). \end{aligned}$$

$$A_2(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) \sin \lambda \Delta(\tau) d\tau,$$

$$A_1(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) \cos \lambda \Delta(\tau) d\tau,$$

$$A_2(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(\tau) \sin \lambda \Delta(\tau) d\tau,$$

$$B_1(\lambda) = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} q(\tau) \left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1) \cos \lambda(2\tau - \Delta(\tau) - \Delta(t_1)) dt_1 \right] d\tau,$$

$$B_2(\lambda) = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} q(\tau) \left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1) \sin \lambda(2\tau - \Delta(\tau) - \Delta(t_1)) dt_1 \right] d\tau,$$

$$C_1(\lambda) = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} q(\tau) \left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1) \cos \lambda(\Delta(\tau) + \Delta(t_1)) dt_1 \right] d\tau,$$

$$C_2(\lambda) = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} q(\tau) \left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1) \sin \lambda(\Delta(\tau) + \Delta(t_1)) dt_1 \right] d\tau,$$

$$D_1(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(\tau) \cos \lambda(2\tau - \Delta(\tau)) d\tau,$$

$$D_2(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(\tau) \sin \lambda(2\tau - \Delta(\tau)) d\tau,$$

$$E_1(\lambda) = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} q(\tau) \left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1) \cos \lambda(\Delta(\tau) + 2t_1 - \Delta(t_1)) dt_1 \right] d\tau,$$

$$E_2(\lambda) = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} q(\tau) \left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1) \sin \lambda(\Delta(\tau) + 2t_1 - \Delta(t_1)) dt_1 \right] d\tau,$$

$$H_1(\lambda) = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} q(\tau) \left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1) \cos \lambda(2\tau - \Delta(\tau) - 2t_1 + \Delta(t_1)) dt_1 \right] d\tau,$$

$$H_2(\lambda) = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} q(\tau) \left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1) \sin \lambda(2\tau - \Delta(\tau) - 2t_1 + \Delta(t_1)) dt_1 \right] d\tau.$$

işarə edək.

Aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 1. (1)–(7) sərhəd məsələsinin məxsusi funksiyaları üçün $n \rightarrow \infty$ ikən aşağıdakı asimptotik düstur doğrudur:

$$\begin{aligned} \lambda_n = n + \frac{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha - A_1(n) - D_1(n)}{n\pi} + \\ + \frac{2D_2(n) \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta + (A_1(n) + D_1(n))(A_2(n) + D_2(n)) - C_2(n)}{n^2\pi} + \\ + \frac{B_2(n) - E_2(n) + H_2(n)}{n^2\pi} - \\ - \frac{(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta + A_1(n) + D_1(n))^2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Γ_{N_0} ilə dörd təpə nöqtəsi

$$\begin{aligned} A &= N_0 + \varepsilon + iN_0, & B &= -N_0 - \varepsilon + N_0i, \\ C &= -N_0 + \varepsilon + iN_0, & D &= N_0 + \varepsilon - N_0i, \end{aligned}$$

olan və saat əqrəbi hərəkətinin əks istiqaməti üzrə yönəlmiş kvadrat konturu işarə edək, burada $i = \sqrt{-1}$ və N_0 natural ədəddir.

Məxsusi ədədlər üçün (12) düsturundan alırıq ki, kifayət qədər böyük N_0 üçün $|n| \leq N_0$ olduqda λ_n ədədi Γ_{N_0} -nin daxilində yerləşir, amma $|n| > N_0$ olduqda λ_n ədədi Γ_{N_0} -nin xaricində yerləşir. Buradan alırıq ki,

$$\begin{aligned} \lambda_{-0}^2 + \lambda_0^2 + \sum_{0 \neq n = -N_0}^{N_0} (\lambda_n^2 - n^2) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} 2\lambda \ln \frac{W(\lambda)}{W_0(\lambda)} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} 2(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta + A_1(\lambda) + D_1(\lambda)) \operatorname{ctg} \lambda \pi d\lambda - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} 2(A_2(\lambda) + D_2(\lambda)) d\lambda - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} 2[-2D_2(\lambda) \operatorname{ctg} \alpha - (A_1(\lambda) + D_1(\lambda))(A_2(\lambda) + D_2(\lambda)) + \\ &\quad + C_2(\lambda) - B_2(\lambda) + E_2(\lambda) - H_2(\lambda)] \frac{\operatorname{ctg} \lambda \pi}{\lambda} d\lambda - \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} 2[\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha) A_1(\lambda) + \\ &\quad + (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) D_1(\lambda) - C_1(\lambda) + B_1(\lambda) - E_1(\lambda) + H_1(\lambda)] \frac{d\lambda}{\lambda} + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} \frac{(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta + A_1(\lambda) + D_1(\lambda))^2 \operatorname{ctg}^2 \lambda \pi}{\lambda} d\lambda + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} \frac{(A_2(\lambda) + D_2(\lambda))^2}{\lambda} d\lambda + O\left(\frac{1}{N_0}\right).$$

Buradan hesablamaqla alırıq ki,

$$\begin{aligned} & \lambda_{-0}^2 + \lambda_0^2 + \sum_{0 \neq n = -N_0}^{N_0} (\lambda_n^2 - n^2) = \\ & = -\frac{2}{\pi} \sum_{0 \neq n = -N_0}^{N_0} (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta + A_1(n) + D_1(n)) - \\ & \quad - \frac{2}{\pi} (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta + A_1(0) + D_1(0)) - \\ & \quad - \sum_{0 \neq n = -N_0}^{N_0} 2[-2D_2(n) \operatorname{ctg} \alpha - (A_1(n) + D_1(n))(A_2(n) + D_2(n)) + \\ & \quad + C_2(n) - B_2(n) + E_2(n) - H_2(n)] \frac{1}{n\pi} + T - \\ & \quad - 2[\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha) A_1(0) + \\ & \quad + (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) D_1(0) - C_1(0) + B_1(0) - E_1(0) + H_1(0)] - \\ & \quad - (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta + A_1(0) + D_1(0))^2 + \\ & \quad + (A_2(0) + D_2(0))^2 + O\left(\frac{1}{N_0}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

burada

$$\begin{aligned} T = \operatorname{Res}_{\lambda=0} \left\{ 2 \left[[2D_2(\lambda) \operatorname{ctg} \alpha + (A_1(\lambda) + D_1(\lambda))(A_2(\lambda) + D_2(\lambda)) - \right. \right. \\ \left. \left. - C_2(\lambda) + B_2(\lambda) - E_2(\lambda) + H_2(\lambda)] \frac{\operatorname{ctg} \lambda \pi}{\lambda} d\lambda \right] \right\}. \end{aligned}$$

(9)-da $N_0 \rightarrow \infty$ ikən limitə keçsək alırıq:

$$\begin{aligned} & \lambda_{-0}^2 + \lambda_0^2 + \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} \left\{ \lambda_n^2 - n^2 - \frac{2}{\pi} [\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha - A_1(n) - D_1(n)] + \right. \\ & \quad + [-2D_2(n) \operatorname{ctg} \alpha - (A_1(n) + D_1(n))(A_2(n) + D_2(n)) + \\ & \quad \left. + C_2(n) - B_2(n) + E_2(n) - H_2(n)] \frac{1}{n\pi} \right\} = \\ & = \frac{2}{\pi} (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha - A_1(0) - D_1(0)) - \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta - \\ & \quad - 2(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta)(A_1(0) + D_1(0)) - \\ & \quad - (A_1(0) + D_1(0))^2 + -(A_2(0) + D_2(0))^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2[\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha) A_1(0) + \\ & + (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) D_1(0) - C_1(0) + \\ & + B_1(0) - E_1(0) + H_1(0) + T. \end{aligned} \quad (14)$$

(14) bərabərliyin sol tərəfinə (1)–(7) sərhəd məsələsinin requlyarizə edilmiş izi deyilir.

Beləliklə, requlyarizə edilmiş iz haqqında əsas teorem isbat edilir.

Ədəbiyyat

1. Гельфанд, И.М., Левитан, Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка.// -Москва: Доклады Академии Наук СССР, -1953. т.88, №4, -с.593-596.
2. Дикий, Л.А. Об одной формуле Гельфанда-Левитана.// -Москва: Успехи матем. наук, - 1953. т.8, вып.2, -с.119-123.
3. Максудов, Ф.Г., Байрамоглу, М., Адыезалов, А.А. О регуляризованном следе оператора Штурма-Лиувилля на конечном отрезке с неограниченным операторным коэффициентом.// -Москва: Доклады Академии Наук СССР, -1984. т.277, №4, -с.795-799.
4. Пикула, М. О регуляризованных следах дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля с запаздывающим аргументом. // -Москва: Дифференциальные уравнения, -1990. т.25 №1, -с.103-109.
5. Митрохин, С.И. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом.// -Уфа: Уфимский математический журнал, -2011. т.3, №4, -с.95-115.
6. Albayrak İ., Köklü, K., Bayramov, A.M. A regularized trace formula for differential equations trace class operator coefficients.// Rocky Mountain Journal of Math. -2010. vol.40, №4, -p.1095-1110.

Мəqalə qəbul olunub: 14.10.25
Təvsiyə edib: prof. Həsənov Y.N.