

GƏMİÇİLİKDƏ TƏBİƏT ELMLƏRİNİN PROBLEMLƏRİ

UOT 517.957

HİPERBOLİK FUNKSIYALARIN TƏTBİQİ İLƏ İNTEQRALLARIN HESABLANMASI

Ağarzeyev B.K., Abdullayeva A.R.

“Azərbaycan Dövlət Dəniz Akademiyası” PHŞ
Az.1000, Bakı şəh., Z.Əliyeva küç.,18

E-mail:bahruz.agarzeyev@asco.az, aynur.abdullayeva@asco.az

Xülasə. Hiperbolik funksiyalar termininə ilk dəfə 1757-ci ildə Vinçenço Rikkatinin işlərində rast gəlinir. O, vahid hiperbola üzərində tədqiqat apararkən bu funksiyaları daxil etmişdir. Hiperbolik funksiyaların xassələri daha dolğun, geniş şəkildə İohann Henrix Lanbertin işlərində verilir. Ümumiyyətlə hiperbolik funksiyalar elementar funksiyalar sinfinə aid olub, sıx şəkildə triqonometrik funksiyalarla əlaqəlidir, bu funksiyalar eksponensial funksiyalarla ifadə olunur. Deməli, bu funksiyalar ilk dəfə XVIII əsrdə riyazi analiz və analitik həndəsəyə tətbiq olunmağa başlamışdır, daha sonra müxtəlif elm sahələrində, mühəndis işlərində də istifadə olunmuşdur.

Məqalədə hiperbolik funksiyaların tətbiqi ilə bəzi irrasional ifadələrin integrallanmasından bəhs edilir. Belə ki, uyğun əvəzləmələrin köməyiylə integralaltı funksiyalar sadələşdirilib cədvəl integrallarının hesablanmasına gətirilir.

Abstract. The term Hyperbolic Functions was first encountered in the works of Vincenzo Riccati in 1757. He introduced these functions while conducting research on the unit hyperbola. The properties of hyperbolic functions were given more fully and extensively in the works of Johann Heinrich Lambert. In general, hyperbolic functions belong to the class of elementary functions and are closely related to trigonometric functions, being expressed using exponential functions. Therefore, these functions first began to be applied in Mathematical Analysis and Analytical Geometry in the 18th century, and were later used in various fields of science and in engineering work.

The article discusses the integration of certain irrational expressions through the application of hyperbolic functions. Thus, with the aid of appropriate substitutions, the integrands are simplified and reduced to the calculation of table integrals (or standard integrals).

Аннотация. Термин "гиперболические функции" впервые встречается в работах Винченцо Риккати в 1757 году. Он ввел эти функции, проводя исследования на единичной гиперболе. Свойства гиперболических функций более полно и широко изложены в работах Иоганна Генриха Ламберта. В целом, гиперболические функции относятся к классу элементарных функций, тесно связаны с тригонометрическими функциями и выражаются через экспоненциальные функции. Следовательно, эти функции впервые стали применяться в математическом анализе и аналитической геометрии в XVIII веке, а затем нашли применение в различных областях науки и в инженерных работах.

В статье рассматривается интегрирование некоторых иррациональных выражений с помощью гиперболических функций. Так, с помощью соответствующих замен подынтегральные функции упрощаются и сводятся к вычислению табличных интегралов.

Açar sözlər: funksiya, integral, hiperbolik, triqonometrik əvəzləmə, kvadrat üçhədlili

Key words: function, integral, hyperbolic, trigonometric substitution, quadratic trinomial (or quadratic polynomial)

Ключевые слова: функция, интеграл, гиперболический, тригонометрическая замена, квадратный трехчлен

Giriş. Məlumdur ki, hiperbolik funksiyalar aşağıdakı şəkildə təyin edilir [1].

$$\begin{aligned} sh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & ch x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ th x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & cth x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

Hiperbolik funksiyaların bəzi sadə xassələrini qeyd edək:

- 1) $ch^2 x - sh^2 x = 1$
- 2) $sh 2x = 2 ch x sh x$
- 3) $ch 2x = ch^2 x + sh^2 x$
- 4) $th 2x = \frac{2th x}{1 + th^2 x}$
- 5) $cth 2x = \frac{1}{2}(th x + cth x)$

Əsas hissə. Burada $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ şəklində olan inteqralların hesablanması məsələlərinə baxılır. İnteqral altındakı kvadrat üçhəddini aşağıdakı şəkildə yazırıq [2].

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = a \left(y + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)$$

Burada $x + \frac{b}{a} = y$

a -nın işarəsindən asılı olaraq aşağıdakı hallara baxırıq:

- 1) Əgər $a > 0$ isə onda $\frac{4ac - b^2}{4a^2} = \pm h^2$ əvəzləməsi aparıb $dx = dy$ olduğunu nəzərə alaraq baxılan inteqralı aşağıdakı şəkllə gətiririk:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R\left(y - \frac{b}{2a}, \sqrt{a} \cdot \sqrt{y^2 \pm h^2}\right) dy \quad (1)$$

- 2) Əgər $a < 0$ olarsa, onda $ax^2 + bx + c = -a \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} - y^2 \right)$ kimi yazıb,

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = h^2 \text{ qəbul edib alırıq ki,}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R\left(y - \frac{b}{2a}, \sqrt{-a} \cdot \sqrt{h^2 - y^2}\right) dy \quad (2)$$

Beləliklə çevirmələrin köməyiylə yuxarıdakı (1) və (2) inteqrallarının hesablanması

$$\begin{aligned} J_1 &= \int R_1(y, \sqrt{y^2 + h^2}) dy & J_2 &= \int R_1(y, \sqrt{y^2 - h^2}) dy \text{ və} \\ J_3 &= \int R_1(y, \sqrt{h^2 - y^2}) dy \end{aligned}$$

inteqrallarının tapılmasına gətirilir.

Burada R_1 - rasioanal funksiyanın simvoludur.

$y = h sht$ əvəzləməsinin köməyiylə J_1 inteqralı hiperbolik funksiyaların inteqrallanmasına gətirilir:

$$J_1 = \int R_1(h sht, h cht) h cht dt = \int R_2(sht, cht) dt \quad (3)$$

Analoji qayda ilə J_2 və J_3 inteqralları da uyğun olaraq $y = h cht$, $y = h tht$ əvəzləmələrinin köməyiylə hesablanır [3].

İndi isə aşağıdakı misallara baxaq:

Misal 1. $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli: Tutaq ki, $x = a sht$, onda $dx = a cht dt$ olar və

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= a^2 \int ch^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (ch 2t + 1) dt = \frac{a^2}{2} \left(\frac{sh 2t}{2} + t \right) + C = \\ &= \frac{a^2}{2} sht cht + \frac{a^2}{2} t + C = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} Arsh \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

Burada $Arsh \frac{x}{a}$ funksiyası $x = a sht$ funksiyasının tərs funksiyasıdır.

Misal 2. $\int \sqrt{(x^2 - 1)^3} dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli: Fərz edək ki, $x = cht$, deməli $dx = sh t dt$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{(x^2 - 1)^3} dx &= \int sh^4 t dt = \int \left(\frac{ch 2t - 1}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{4} \int ch^2 2t dt - \\ &- \frac{1}{2} \int ch 2t dt + \frac{1}{4} \int dt = \frac{1}{32} sh 4t - \frac{1}{4} sh 2t + \frac{3}{8} t + C \end{aligned}$$

Əgər

$$\begin{aligned} sh 4t &= 2 sh 2t ch 2t = 4 cht sh t = (ch^2 t + sh^2 t) = 4x \sqrt{x^2 - 1} (2x^2 - 1), \\ sh 2t &= 2x \sqrt{x^2 - 1}, \quad t = Arch x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \end{aligned}$$

olduğunu nəzərə alsaq, yaza bilərik ki:

$$\int \sqrt{(x^2 - 1)^3} dx = \frac{1}{8} (2x^3 - 5x) \sqrt{x^2 - 1} + \frac{3}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C$$

Nəticə. Beləliklə baxılan $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ inteqralında $x = a sht$, $x = a cht$ əvəzləmələrinin köməyiylə inteqral daha asan yolla hesablanır. Çünki, triqonometrik əvəzləmə apardıqda inteqralaltı funksiya daha mürəkkəb şəkllə düşür. Lakin, hiperbolik funksiyalarla əvəzləmə zamanı inteqralaltı funksiyanı müəyyən metodların köməyiylə rasionallaşdırmaq olur. Burada metodlar dedikdə vuruqlara ayırma, qeyri-müəyyən əmsallar üsulu, hədd əlavə edib çıxma və digər üsullar nəzərdə tutulur.

Ədəbiyyat

1. Ю.Е. Печенежский, А.Н. Якунин. Гиперболические функции и их приложения. Харьков, 2000, стр. 81-100
2. M.V. Vəliyev. Riyazi analiz. Bakı, 2023, səh.100-150
3. B.K. Ağarzayev. Riyazi analiz. Bakı, 2024, səh.70-120

Məqalə qəbul olunub: 14.10.25
Təvsiyə edib: prof. Həsənov Y.N.