

UOT 629.621

ANALYSIS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR OPERATOR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN HILBERT SPACES

^{1,2,3}Aghayeva G.A., ³Asgarov R.X., ³Hasanova L.A.

¹Baku State University, Baku, Azerbaijan

² Postdoctoral Department, University of Economics and Pedagogy, Karshi, Uzbekistan

³“Azerbaijan State Marine Academy” LEPL

E-mail: gulsumm_agayeva@mail.ru, rafiq.asgarov@asco.az,
leyla.hasanova@asco.az

Abstract. This study provides an in-depth investigation of the regular solvability of boundary value problems for second-order elliptic operator-differential equations defined on a finite interval and involving operator coefficients with discontinuities. Special attention is devoted to understanding how the structural properties of the operator coefficients, their spectral characteristics, and the nature of the boundary operators influence the existence, uniqueness, and stability of solutions.

The analysis relies on modern techniques of operator theory and spectral analysis in Hilbert spaces, together with generalized boundary conditions that allow the treatment of a broad class of operator-differential models. The paper establishes sufficient conditions for the regular solvability of the boundary value problem, connecting these conditions with the spectral behavior of the corresponding operator coefficients. The results significantly contribute to the theoretical framework of operator-differential equations with discontinuous coefficients and provide a mathematical foundation for further applications in mathematical physics, wave theory, and related areas.

Xülasə. Bu tədqiqat işində sonlu intervalda təyin edilmiş, əmsalları üzrə fasilələrə malik olan ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin müntəzəm həll olunma xüsusiyyətləri hərtərəfli araşdırılır. İşdə operator əmsalların struktur quruluşu, onların spektral xassələri və sərhəd operatorlarının tipi kimi amillərin həllin mövcudluğuna, yeganəliyinə və dayanıqlığına təsiri detallı şəkildə təhlil edilir.

Tədqiqat Hilbert fəzalarında operator nəzəriyyəsinin müasir metodlarına əsaslanır və ümumiləşdirilmiş sərhəd şərtlərinin tətbiqi ilə daha geniş sinif operator-diferensial modellərinin təsvirinə imkan yaradır. Müntəzəm həll olunmanı təmin edən kifayət qədər şərtlər əldə edilmiş və bu şərtlərin operator əmsalların spektral xüsusiyyətləri ilə əlaqəsi göstərilmişdir. Alınan nəticələr operator-diferensial tənliklərin nəzəri bazasının dərinləşməsinə və riyazi fizika, dalğaların nəzəriyyəsi və digər tətbiqi sahələrdə modellərin təhlilinə mühüm töhfə verir.

Аннотация. В данной работе проводится углублённое исследование регулярной разрешимости краевых задач для второго порядка эллиптических операторно-дифференци-

альных уравнений, определённых на конечном интервале и содержащих операторные коэффициенты с разрывами. Особое внимание уделяется анализу влияния структурных особенностей операторных коэффициентов, их спектральных свойств, а также характера граничных операторов на поведение решений.

Предлагаемый подход основан на современных методах спектральной теории операторов в гильбертовых пространствах и использовании обобщённых граничных условий, позволяющих описать широкий класс операторно-дифференциальных моделей. Установлены достаточные условия регулярной разрешимости краевой задачи, обеспечивающие существование, единственность и устойчивость решения относительно исходных данных. Полученные результаты расширяют теоретическую базу исследования операторно-дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и могут быть применены при анализе математических моделей в задачах математической физики, теории колебаний и смежных областях.

Key words: operator-differential equation, boundary value problem, Hilbert space, self-adjoint operator, regular solvability, spectral analysis

Açar sözlər: operator-diferensial tənlik, sərhəd məsələsi, Hilbert məkanı, öz-özüə qoşulan operator, müntəzəm həllolunma, spektral təhlil

Ключевые слова: операторно-дифференциальное уравнение, краевая задача, гильбертово пространство, самосопряжённый оператор, регулярная разрешимость, спектральный анализ

Mathematics Subject Classification: 35125 47A10, 58140

1. Introduction.

Let $L_2((0, T); H)$ be the Hilbert space of all functions $f(t)$, defined almost everywhere on the interval $(0, T)$ with values in H , such that

$$\|f\|_{L_2((0, T); H)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Following the monographs [1, 2], we define the Hilbert space

$$W_2^2((0, T); H) = \{u : u'' \in L_2((0, T); H), A^2 u \in L_2((0, T); H)\}$$

with the norm

$$\|u\|_{W_2^2((0, T); H)} = \left(\|u''\|_{L_2((0, T); H)}^2 + \|A^2 u\|_{L_2((0, T); H)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Similarly, the spaces $L_2(R; H)$ and $W_2^2(R; H)$, where R is the real line.

We introduce the following subspace of $W_2^2((0, T); H)$

$$W_{2,K}^2((0, T); H) = \{u : u \in W_2^2((0, T); H), u'(0) = Fu(0), u'(T) = 0\},$$

where $F \in L(H_{3/2}, H_{1/2})$. Here, $L(X, Y)$ is the space of bounded linear operators acting from X into Y . In what follows, derivatives are understood in the sense of distributions [1, 2].

Consider the boundary value problem in the space H

$$-u''(t) + \rho(t)A^2 u(t) + A_1 u'(t) + A_2 u(t) = f(t), \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$u'(0) = Fu(0), \quad u'(T) = 0, \quad (2)$$

where $f(t), u(t)$ are functions with values in H , and the operator coefficients satisfy the following conditions:

1. A is a positively defined self-adjoint operator in H ;
2. $\rho(t) = \begin{cases} \alpha^2, & t \in (0, t_0), \\ \beta^2, & t \in (t_0, T), \end{cases} \quad t_0 \in (0, T), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$;
3. $F \in L(H_{3/2}, H_{1/2})$;
4. $B_j = A_j A^{-j}$ is bounded in H , $j = 1, 2$.

Definition. If for $f(t) \in L_2((0, T); H)$ there exists a vector-function $u(t) \in W_{2,F}^2((0, T); H)$, that satisfies equation (1) almost everywhere on $(0, T)$, the $u(t)$ is called a regular solution of equation (1).

2. Some results

Lemma 1. Let conditions 1)–3) hold and $\operatorname{Re} A^{-1}F \geq 0$ and $H_{3/2}$. Then for any $u \in W_{2,F}^2((0, T); H)$ the following inequality holds:

$$\|Au'\|_{L_2((0,T);H)}^2 + \|\rho^{1/2} A^2 u\|_{L_2((0,T);H)}^2 \leq \operatorname{Re}(P_0 u, A^2 u)_{L_2((0,T);H)}. \quad (3)$$

Corollary 1. Under the conditions of the lemma, the homogeneous equation $P_0 u = 0$ only the trivial solution.

Corollary 2. Under the lemma's conditions, for any $u \in W_{2,F}^2((0, T); H)$ the following inequalities hold:

$$\begin{aligned} \|A^2 u\|_{L_2((0,T);H)} &\leq \frac{1}{\min(\alpha^2; \beta^2)} \|P_0 u\|_{L_2((0,T);H)}, \\ \|Au'\|_{L_2((0,T);H)} &\leq \frac{1}{2 \min(\alpha; \beta)} \|P_0 u\|_{L_2((0,T);H)}. \end{aligned}$$

Main results.

Theorem 1. Let the conditions of lemma 1)-3) be satisfied. Then the operator P_0 is isomorphic to space $W_{2,F}^2((0, T); H)$ on $L_2((0, T); H)$.

Theorem 2. Let conditions 1)-4) be satisfied, $\operatorname{Re} A^{-1}F \geq 0$ in $H_{1/2}$ and there is an inequality

$$q(\alpha, \beta) = \frac{1}{2 \min(\alpha, \beta)} \|B_1\| + \frac{1}{\min(\alpha^2, \beta^2)} \|B_2\| < 1.$$

Then the problem (1),(2) is regularly solvable.

Corollary 3. Let conditions 1) and 4) be satisfied and inequality holds $\frac{1}{2} \|B_1\| + \|B_2\| < 1$.

Then equation

$$\begin{aligned} -u''(t) + A^2u(t) + A_1u'(t) + A_2u(t) &= f(t), \quad t \in (0, T), \\ u'(0) &= 0, \quad u'(T) = 0 \end{aligned}$$

regularly solvable.

The proof follows from Theorem 2 when $\rho(t) \equiv 1$ and $F = 0$. This issue was examined in work [5]

References

1. Горбачук В. И., Горбачук М. И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наукова думка, 1984, 284 с.
2. Лионс Ж.-Л., Мадженс Э. Неоднородные граничные задачи и их применения. М.: Мир, 1971, 371 с.
3. Крейн С. Г., Лаптев Г.И. Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве. I // Дифференц. уравнения, 1966, 2:3, с.382-390.
4. Крейн С.Г., Лаптев Г.И. Корректность граничных задач для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве. II // Дифференц. уравнения, 1966, 2:7, с.919-926.
5. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка // Дифференц. уравнение, 1992, т.28, №4, с.652-651.
6. Мирзоев С.С., Якубова Х.В. О разрешимости краевых задач с операторами в краевых условиях для одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка // Докл. НАН. Азерб., 2001, 57:1-3, с.12-17.
7. Мирзоев С.С., Алиев А.Р., Рустамова А.А. Об условиях разрешимости краевой задачи для эллиптического операторно-дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом // Метем. Заметки, 2012, вып.92, №5, с.789-793.
8. Мирзоев С.С., Салимов М.Ю. О разрешимости краевой задачи для уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве с операторным коэффициентом в краевой условии // Матем. заметки, 2012, т.91, №6, с.861-869.
9. Мирзоев С.С., Сафаров Р.Ф. О голоморфных решениях некоторых краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа // Украинский матем. журнал, 2011, 63:3, с.416-420.
10. Agayeva G.A. On a boundary value problem for operator-differential equations of the second order. Proceedings of the Pedagogical University, section of the natural sciences.p.9-17,(2017)
11. Agayeva G.A. On the existence and uniqueness of the generalized solution of a boundary value problem for second order operator-differential equations Transactions of NAS of Azerbaijan, №4, p. 3-8, (2014).
12. Agayeva G.A. On the solvability of a boundary value problem for elliptic operator-differential equations with an operator coefficient in the boundary condition. Bulletin of Baku University, №1, p.37-42, (2015)
13. Aliyev A.R. Boundary Value Problems for a Class of High-Order Operator-Differential Equations with Variable Coefficients. Matem zametki, 74(6), 803-814 (2003).
14. Gasimov M.G. On solvability of boundary value problem for a class operator-differential equation. DAN SSSR, 235(3),505-508 (1972).
15. Gasimova G.M. On solvability conditions of a boundary value problem with an operator in the boundary condition for a second order elliptic operator-differential equations. Proceeding of

- the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan
Volume 40, p. 172-177, 2014
16. Gorbacuk V.I., Gorbacuk M.L., Boundary value problem for differential-operator equations. Kiev, Nauova Dumka, 284 p (1984)
 17. Mirzoyev S.S., Aghayeva G.A. On the solvability conditions of solvability of one boundary value problems for the second order differential equations with operator coefficients. Inter. Journal of Math. Analyzis, p.149-156, 2014, v.8, №4.
 18. Mirzoyev S.S., Agayeva G.A. On correct solvability of one boundary value problems for the differential equations of the second order on Hilbert space. Applied Mathematical Sciences 2013, v.7, p.3935-3945. №79.
 19. Mirzoev S.S., Aliyev A.R., Gasimova G.M. Solvability conditions for a boundary value problem with operator coefficients and related estimations of the norms of intermediate derivatives. Dokl.RAN №2, p. 511-513, 2016.
 20. Mirzoyev S.S., Conditions for well-defined solvability of boundary value problems for operator differential equations Mirzoyev S.S., DAN, SSSR, №2, p.291-295(1983)
 21. Skalikov A.A. Elliptic equations in Hilbert space and related problems. prof. I.G.Petrovsky seminars, 14, 140-224.
 22. Yakubov S.Ya. Linear-differential equations and their applications Baku, Elm, 220p.(1985)

Məqalə qəbul olunub: 14.10.25
Təvsiyə edib: prof. Həsənov Y.N.